Exercices supplémentaires sur les relations

On rappelle ci-dessous les définitions et la méthodologie pour montrer qu'une relation binaire est une relation d'ordre, ainsi que la façon de montrer qu'une relation binaire *n'est pas* une relation d'ordre.

Définition 1 (Relation réflexive)**.** Une relation $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ est dite réflexive ssi pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$.

Exemple 1. La relation d'égalité entre éléments d'un ensemble E est réflexive : on a toujours $x = x$ pour n'importe quel $x \in E$.

Définition 2 (Relation transitive)**.** Une relation $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ est dite transitive ssi pour tous $x, y, z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.

Exemple 2. La relation $\leqslant$ sur les entiers naturels $\mathbb{N}$ est transitive : si $0 \leqslant 1$ et $1 \leqslant 2$, alors on a bien que $0 \leqslant 2$.

Définition 3 (Relation symétrique)**.** Une relation $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ est dite symétrique ssi pour tous $x, y \in E$, $x\mathcal{R}y$ implique $y\mathcal{R}x$.

Exemple 3. La relation "a un lien de parenté" entre deux personnes est symétrique : si j'ai un lien de parenté avec une personne (par exemple, grand-parent), cette personne a un lien de parenté avec moi (par exemple, grand-enfant).

Définition 4 (Relation antisymétrique)**.** Une relation $\mathcal{R} \subseteq E \times E$ est dite antisymétrique ssi pour tous $x, y \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$.

Exemple 4. La relation $\subseteq$ entre parties d'ensembles est antisymétrique : si $X \subseteq Y$ et $Y \subseteq X$, on a $x \in X \iff x \in Y$ et donc $X = Y$ par la définition d'égalité entre ensembles.

Définition 5 (Relation d'ordre)**.** Une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre ssi $\mathcal{R}$ est (i) réflexive, (ii) transitive et (iii) antisymétrique.

Définition 6 (Relation d'équivalence)**.** Une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ssi $\mathcal{R}$ est (i) réflexive, (ii) transitive et (iii) symétrique.

Point méthodologie. Pour montrer qu'une relation est une relation d'ordre, il suffit de montrer qu'elle est (i) réflexive, (ii) transitive et (iii) antisymétrique par définition. Par exemple, rappelez-vous de l'exercice 2 du TD 1 :

Soit E l'ensemble des digits sous forme de cristaux liquides, tels que présentés dans la figure suivante.

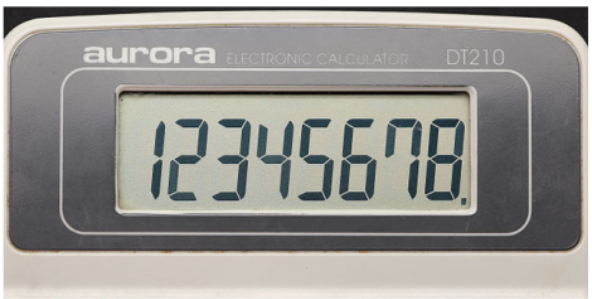

Figure 1 – Image Coyau / Wikimedia Commons / CC BY-SA 3.0

La relation $\mathcal{R}$ est définie par $a\mathcal{R}b$ si b est obtenu à partir de a en allumant n ($n \in \mathbb{N}$) cristaux en plus (autrement dit sans éteindre de cristaux). Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

(i) $\mathcal{R}$ est réflexive : on pose $x \in E$. On montre que $x\mathcal{R}x$. Par définition de $\mathcal{R}$, il suffit de donner un $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on obtient x à partir de x en allumant n cristaux en plus. Ici, on peut donner $n = 0$. En allumant exactement 0 cristaux en plus, on obtient bien x à partir de x.

(ii) $\mathcal{R}$ est transitive : on pose $x, y, z \in E$, et on suppose que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Par définition de $\mathcal{R}$, cela signifie qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tel qu'on peut obtenir y à partir de x en allumant m cristaux en plus, et on peut obtenir z à partir de y en allumant n cristaux en plus. Ainsi, on peut obtenir z à partir de x en allumant exactement $n + m$ cristaux en plus.

(iii) $\mathcal{R}$ est antisymétrique : on pose $x, y \in E$, et on suppose que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Par définition de $\mathcal{R}$, cela signifie qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tel qu'on peut obtenir y à partir de x en allumant m cristaux en plus, et on peut obtenir x à partir de y en allumant n cristaux en plus. Ainsi, si on pose $|x|$ et $|y|$ comme le nombre de cristaux de x et le nombre de cristaux de y, on a que $|y| = |x| + m$ et $|x| = |y| + n$. Donc $|y| = |y| + n + m$, ce qui force $n = m = 0$. De fait, y peut être obtenu de x en allumant exactement 0 cristaux en plus, ce qui signifie que $x = y$.

Ce raisonnement doit être mécanique : pour montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, on sait qu'on doit toujours montrer ces trois propriétés. De plus, pour montrer une propriété, on procède toujours de la même façon : on pose les éléments de E, on suppose les hypothèses si elles existent, on déplie la définition de $\mathcal{R}$ dans les hypothèses pour nous donner des informations supplémentaires, puis on conclut.

Un autre point de méthodologie. Au contraire, pour montrer qu'une relation $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre, il suffit de montrer une des trois propriétés suivantes : $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive, ou $\mathcal{R}$ n'est pas transitive, ou $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique. Par exemple, la relation $<$ sur les entiers n'est pas une relation d'ordre : on n'a pas $0 < 0$. Comme $<$ n'est pas réflexive, ce n'est pas une relation d'ordre. De plus, ce n'est pas non plus une relation d'équivalence.

Exercice 1. *Asymétrie*

On rappelle la définition de relation asymétrique :
Définition 7 (Relation asymétrique)**.** Une relation $\mathcal{R}$ est une relation asymétrique ssi pour tous a, b, il est impossible que $a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$.

Montrer qu'une relation asymétrique est irréflexive, c'est-à-dire que pour tous x, on n'a pas $x\mathcal{R}x$.

Exercice 2. *Relation d'ordre canonique*

Soit X un ensemble. La relation d'ordre canonique, c'est-à-dire, celle à laquelle il est bon de penser quand on nous dit "relation d'ordre", est l'inclusion $\subseteq$ entre les parties de X.

1. Posons $X = \{0, 1, 2\}$. L'ensemble des parties de X, noté $\mathcal{P}(X)$ est :

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

   Écrire le diagramme de Hasse correspondant à l'inclusion sur $\mathcal{P}(X)$.
2. Soit X un ensemble quelconque. Montrer que la relation $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(X)$ est une relation d'ordre.
3. Une relation *d'ordre stricte* est une relation asymétrique et transitive. Montrer que la relation d'inclusion stricte $\subset$ est une relation d'ordre stricte.
4. On définit l'égalité ensembliste par extension : $X =_{\mathbf{Set}} Y$ ssi $X \subseteq Y$ et $Y \subseteq X$. Montrer que la relation $=_{\mathbf{Set}}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3. *Divisibilité*

On définit la relation $\preceq$ entre entiers comme suit : $x \preceq y$ ssi $x \mid y$, où $x \mid y$ signifie que x divise y.

1. Posons $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Donner l'ensemble des couples (x, y) qui composent la relation $\preceq$ sur X.
2. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Exercice 4. *Encore des ordres*

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E.

1. On définit $\mathcal{R}^{\mathrm{op}}$ de la façon suivante : $x\mathcal{R}^{\mathrm{op}}y$ ssi $y\mathcal{R}x$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2. On ordonne les fonctions de E dans E de la manière suivante : $f \sqsubseteq g$ ssi pour tout $x \in E$, $f(x)\mathcal{R}g(x)$. Montrer que $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre.

Exercice 5. *Composition*

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires sur E. On définit la relation binaire $\mathcal{R} \fatsemi \mathcal{S}$ comme suit :

$$x(\mathcal{R} \fatsemi \mathcal{S})y \iff \exists z.\ x\mathcal{R}z \wedge z\mathcal{S}y.$$

1. Montrer que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des relations d'ordres, alors $\mathcal{R} \fatsemi \mathcal{S}$ est également une relation d'ordre.

2. Montrer que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des relations d'équivalences, alors $\mathcal{R} \fatsemi \mathcal{S}$ est également une relation d'équivalence.

Exercice 6. *Entiers relatifs*

On peut construire l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ à partir de couples d'entiers naturels quotientés par une certaine relation d'équivalence. Un couple (n, m) représente l'entier relatif $n - m$. Dans cet exercice, nous allons formaliser cette construction.

1. Donner plusieurs couples d'entiers naturels pour représenter 0, 1 et -2.

On définit la relation $\mathcal{R}$ entre couples d'entiers naturels comme suit : $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ ssi $x + y' = x' + y$.

2. Vérifier que les différents couples que vous avez donné dans la question précédente pour le même entier sont en relations par $\mathcal{R}$.

3. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

On a alors une bijection entre $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ (appelée le *quotient* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $\mathcal{R}$) et $\mathbb{Z}$.

Exercice 7. *Modulo*

Nous avons vu, dans l'exercice précédent, qu'on pouvait construire les entiers relatifs à partir des entiers naturels. Dans cet exercice, on montre une autre forme de quotient : le quotientage par modulo. On considère l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. On montre qu'on peut voir cet ensemble, quotienté avec une relation bien choisie, comme l'ensemble des booléens. On rappelle que l'opération modulo est définit comme suit : $x \bmod y = r$, où r est le reste de la division entière x/y.

1. Donner une définition de la négation logique en utilisant uniquement l'addition modulo 2 (*i.e.*, le reste de la division euclidienne de $x + y$ par 2).

2. Donner une définition de la conjonction logique en utilisant uniquement la multiplication modulo 2 (*i.e.*, le reste de la division euclidienne de $x \times y$ par 2).

3. Donner une définition de la disjonction logique en utilisant uniquement l'addition et la multiplication modulo 2.

4. Montrer que l'égalité modulo 2 (*i.e.*, $x = y \mod 2$ ssi $x \mod 2 = y \mod 2$) est une relation d'équivalence.

En général, on nomme $\mathbb{F}_2$ l'ensemble $\mathbb{Z}$ modulo 2. $\mathbb{F}_2$ est en bijection avec les booléens.