Exercices supplémentaires sur les bornes (sup. et inf.)

On rappelle ci-dessous les définitions et la méthodologie pour montrer qu'un élément d'un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ est la borne supérieure ou inférieure d'un sous-ensemble de E.

Définition 1 (Minorant)**.** Un élément $x \in E$ est un **minorant** de $S \subseteq E$ ssi pour tout $s \in S$, $x \leqslant s$.

Définition 2 (Majorant)**.** Un élément $x \in E$ est un **majorant** de $S \subseteq E$ ssi pour tout $s \in S$, $s \leqslant x$.

Définition 3 (Borne inférieure)**.** Un élément $x \in E$ est la **borne inférieure** de $S \subseteq E$ ssi (i) x est un minorant de S et (ii) pour tout minorant $y \in E$ de S, $y \leqslant x$. Le minorant de S est dénoté $\inf\{S\}$.

Définition 4 (Borne supérieure)**.** Un élément $x \in E$ est la **borne supérieure** de $S \subseteq E$ ssi (i) x est un majorant de S et (ii) pour tout majorant $y \in E$ de S, $x \leqslant y$. Le majorant de S est dénoté $\sup\{S\}$.

Exemple 1. Rappelez vous de l'énoncé de l'exercice 6 du TD 1 :

> **Exercice 1.6 (Monotonie des infs et sups binaires)**
> Montrer que les 2 opérations $\inf$ et $\sup$ (celles des treillis) sont monotones, c'est-à-dire, si $x \leq x'$ et $y \leq y'$ alors $\inf\{x, y\} \leq \inf\{x', y'\}$ et $\sup\{x, y\} \leq \sup\{x', y'\}$.

Montrons cette propriété de monotonie. Soient $x, x', y, y' \in E$. Supposons $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$.

- Prouvons d'abord que $\inf\{x, y\} \leqslant \inf\{x', y'\}$. Par définition de la borne inférieure, il s'agit de montrer que $\inf\{x, y\}$ est un minorant de $\{x', y'\}$. En effet, comme $\inf\{x', y'\}$ est le plus grand minorant de $\{x', y'\}$, tout autre minorant de cet ensemble sera plus petit que $\inf\{x', y'\}$.
  Par définition, pour montrer que $\inf\{x, y\}$ est un minorant de $\{x', y'\}$, il faut montrer que $\inf\{x, y\} \leqslant x'$ et $\inf\{x, y\} \leqslant y'$. Étant donné que $x \leqslant x'$ et que $\inf\{x, y\}$ est un minorant de x, *i.e.*,$\inf\{x, y\} \leqslant x$, nous avons $\inf\{x, y\} \leqslant x'$ par transitivité de $\leqslant$. De la même façon, nous avons $y \leqslant y'$ et $\inf\{x, y\} \leqslant y$ car $\inf\{x, y\}$ est un minorant de y. Donc, par transitivité de $\leqslant$, $\inf\{x, y\} \leqslant y'$, et $\inf\{x, y\}$ est bien un minorant de $\{x', y'\}$.
- Prouvons maintenant que $\sup\{x, y\} \leqslant \sup\{x', y'\}$. Par définition de la borne supérieure, il s'agit de montrer que $\sup\{x', y'\}$ est un majorant de $\{x, y\}$. En effet, comme $\sup\{x, y\}$ est le plus petit majorant de $\{x, y\}$, tout autre majorant de cet ensemble sera plus grand que $\sup\{x, y\}$.
  Par définition, pour montrer que $\sup\{x', y'\}$ est un majorant de $\{x, y\}$, il faut montrer que $x \leqslant \sup\{x', y'\}$ et $y \leqslant \sup\{x', y'\}$. Étant donné que $x \leqslant x'$ et que $\sup\{x', y'\}$ est un majorant de x, *i.e.*,$x' \leqslant \sup\{x', y'\}$, nous avons $x \leqslant \sup\{x', y'\}$ par transitivité de $\leqslant$. De la même façon, nous avons $y \leqslant y'$ et $y' \leqslant \sup\{x', y'\}$ car $\sup\{x', y'\}$ est un majorant de y'. Donc, par transitivité de $\leqslant$, $y \leqslant \sup\{x', y'\}$, et $\sup\{x', y'\}$ est bien un majorant de $\{x, y\}$.

Exercice 1. *Un raccourci*

Dans la feuille supplémentaire précédente, on a montré que l'*opposé* d'une relation d'ordre est également une relation d'ordre. Pour rappel, on définit $\mathcal{R}^{\text{op}}$ l'opposé de R de la façon suivante : $x\mathcal{R}^{\text{op}}y$ ssi $y\mathcal{R}x$.
On va utiliser cette propriété pour nous permettre de factoriser les preuves, et ne pas faire comme pour l'exercice 6 du TD 1 où on a simplement répété le même argument de manière symétrique.

1. Montrer que $\inf_{\mathcal{R}}\{x, y\} = \sup_{\mathcal{R}^{\text{op}}}\{x, y\}$.
2. En quoi cela nous aide-t-il pour la preuve de l'exercice 6 du TD 1 ?

Exercice 2. *Treillis complet canonique*

Dans la feuille supplémentaire précédente, nous avons parlé de "relation d'ordre canonique" pour la relation d'inclusion entre ensembles. En fait, cette relation d'ordre satisfait d'autres bonnes propriétés : c'est un *treillis complet*.
On rappelle qu'un treillis complet est un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ tel que pour tout $S \subseteq E$, $\inf\{S\}$ et $\sup\{S\}$ sont définis.

Montrer que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ est un treillis complet.

Exercice 3. *Les trucs binaires ? Pas mon genre*

Dans cet exercice, on propose de montrer que les infs et sups binaires peuvent être "améliorés" en infs et sups pour tout ensemble fini sous une petite condition. Soit E et $\leqslant$ une relation d'ordre sur E telle que pour tout $x, y \in E$, $\inf\{x, y\}$ est défini.

1. Soit $\top$ la borne supérieure de E, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, $x \leqslant \top$. Montrer que $\top$ est le plus petit minorant de l'ensemble vide.
2. Montrer que pour un élément $x \in E$, le plus petit minorant du singleton $\{x\}$ est x lui-même.
3. Montrer que pour tous éléments $x, y, z \in E$, $\inf\{\inf\{x, y\}, z\} = \inf\{x, y, z\}$.
4. Déduire des trois questions précédentes une définition de $\inf_{\text{finite}}\{S\}$ pour S sous-ensemble fini de E qui s'exprime uniquement en fonction de $\top$ et de la borne inférieure binaire.
5. Utiliser l'exercice 1 pour justifier une définition similaire pour sup. De quoi avons-nous besoin dans ce cas là ?

Exercice 4. *Minimisation*

Pour toujours plus minimiser nos définitions, on va montrer dans cet exercice qu'en fait, nous avons uniquement besoin soit des infs, soit des sups, mais pas des deux (dans la plupart des cas).
On rappelle qu'un treillis complet est un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ tel que pour tout $S \subseteq E$, $\inf\{S\}$ et $\sup\{S\}$ sont définis.

1. Montrer que $(E, \leqslant)$ est un treillis complet ssi pour tout $S \subseteq E$, $\inf\{S\}$ est défini.
   Indice : déplier la définition de treillis complet. Il ne manque plus qu'à définir un des deux éléments.
2. Montrer que $(E, \leqslant)$ est un treillis complet ssi pour tout $S \subseteq E$, $\sup\{S\}$ est défini.
   Indice : il est, encore une fois, possible d'utiliser l'exercice 1 ici.
3. Pourquoi les constructions précédentes ne fonctionnent-elles pas sur un treillis (non complet) ?
4. En déduire les conditions à ajouter pour faire fonctionner ces définitions dans un treillis.